# Carlo Cellucci
# LE RAGIONI DELLA LOGICA

Biblioteca di Cultura Moderna Laterza

Prima edizione 1998

Carlo Cellucci

# LE RAGIONI DELLA LOGICA

Laterza

Finito di stampare nel gennaio 1998
Poligrafico Dehoniano - Stabilimento di Bari
per conto della Gius. Laterza & Figli Spa
CL 20-5438-8
ISBN 88-420-5438-0

Tutte le nostre logiche fino ad ora sono appena un'ombra di ciò che auspico e che quasi vedo di lontano.

G.W. Leibniz, *Lettera a Gabriel Wagner, fine 1696,*
LEP VII, p. 516

# PREFAZIONE

La logica è stata un grande argomento nell'antichità, successivamente ha avuto alterne vicende, ma a partire da Frege ha goduto di uno straordinario sviluppo durato quasi un secolo. Poi, però, essa ha perso slancio, apparendo sempre più incerta sulle sue motivazioni e sulla direzione da prendere. Questo libro ne ricerca le cause, sia prossime che remote, riesaminando le ragioni della logica quali sono state espresse da alcuni dei suoi protagonisti, da Platone a Gödel.

Un tale riesame è essenziale non solo per spiegare i motivi delle attuali incertezze della logica, ma per comprendere la natura stessa della disciplina. Le ragioni della logica sono state molteplici nel suo sviluppo e non sempre sono state formulate limpidamente né sono state distinte nettamente tra loro. Riesaminarle costituisce una condizione indispensabile per comprendere la variegata e per certi versi ambigua natura della logica.

Riesaminare le ragioni della logica costituisce, però, solo uno degli scopi del libro. Un altro scopo, se non lo scopo principale, è quello di offrire alla logica una prospettiva auspicabilmente capace di restituirla alla condizione di disciplina viva e vitale. A tal fine nel libro si discutono i limiti dell'attuale identificazione del metodo matematico col metodo assiomatico, e se ne propone alternativamente l'identificazione col metodo analitico, un metodo molto antico che è stato a lungo al centro dell'attenzione ma che è stato quasi del tutto trascurato negli ultimi due secoli. Partendo da esso e arricchendolo di strumenti per la ricerca delle ipotesi, nel libro si delinea una nuova visione della logica.

Ciò comporta un cambiamento nella concezione della conoscenza scientifica. Nell'età moderna e contemporanea questa è stata vista come concentrata in un unico sistema e basata su un singolo soggetto conoscente (tipicamente, da Descartes a Kant), o addirittura su nessun soggetto conoscente (tipicamente, nell'empirismo logico). Nel libro, invece, essa viene vista come distribuita tra più sistemi e basata su più soggetti conoscenti capaci di interagire tra loro. Questo comporta il passaggio da una concezione della conoscenza scientifica come sistema chiuso a una concezione della conoscenza scientifica come sistema aperto.

Il libro consta di un'introduzione e di dieci capitoli, il cui contenuto può essere così riassunto.

Nell'introduzione si pone il problema dei limiti dell'attuale paradigma logico, rappresentato dalla logica matematica, che identifica lo scopo della logica con la giustificazione e fondazione di conoscenze già acquisite. Tale paradigma appare inadeguato rispetto alle esigenze di vari settori del sapere contemporaneo, come l'informatica, l'intelligenza artificiale, la scienza cognitiva, la linguistica, la sociologia, l'economia, nonché della stessa matematica con cui pure dall'inizio la logica matematica ha instaurato un rapporto privilegiato. A tale paradigma si contrappone un nuovo paradigma logico, che assume a oggetto della logica non solo la giustificazione e fondazione di conoscenze già acquisite ma anche la scoperta di nuove conoscenze, e si propone non solo come una logica della giustificazione ma anche come una logica della scoperta.

Nel capitolo 1 si esaminano le ragioni per cui la logica matematica ha identificato lo scopo della logica con la giustificazione e fondazione di conoscenze già acquisite e ha escluso con Frege la possibilità di una logica della scoperta. Al rifiuto di Frege si contrappone la tesi, sostenuta già da Platone e Aristotele, che una logica della scoperta è possibile e si basa sul metodo analitico. Dopo aver analizzato le principali obiezioni che sono state avanzate contro tale tesi, si esamina il tentativo di Descartes di ridarle vigore e si discutono le ragioni del suo fallimento.

Nel capitolo 2 si collega il rifiuto di Frege di una logica della scoperta alla sua contrapposizione della logica scientifica alla logica naturale. Si esamina la proposta alternativa di Leibniz e Hilbert di considerare la logica scientifica come un surrogato della logica naturale e se ne discutono i limiti. Si esaminano anche due ulteriori formulazioni del rapporto tra logica scientifica e logica naturale, cioè quella dell'algebra della logica (Boole, Schröder, Peirce), che fa dello studio delle leggi del pensiero l'oggetto della logica scientifica, e quella dell'aritmetizzazione dell'analisi (Weierstrass, Dedekind, Cantor), che prescinde dalla logica scientifica fondando la matematica sulla logica naturale. Si considera, inoltre, l'influenza che l'idea della logica come studio delle leggi del pensiero ha esercitato sulla logica matematica (Frege, Hilbert, Gentzen, Prawitz). Si sostiene infine che la logica della scoperta non deve porsi come un surrogato della logica naturale, bensì come un suo aiuto sebbene un aiuto non infallibile.

Nel capitolo 3 si ricostruiscono le idee di Pascal sul metodo della matematica, che egli identifica col metodo assiomatico, e si fa vedere come esse siano state riprese da Frege e dalla logica matematica. Un punto importante del parallelo tra Frege e Pascal riguarda il ruolo dell'intuizione nella conoscenza matematica. Si mostra che tale ruolo, sebbene apparentemente rifiutato da Frege per quanto riguarda l'aritmetica, in realtà è da lui sempre stato assunto implicitamente, fino ad essere apertamente riconosciuto dopo la scoperta del paradosso di Russell. Si fa anche vedere che il ruolo dell'intuizione è essenziale non solo per Frege ma per tutta la logica matematica successiva.

Nel capitolo 4 si mostra che, a monte dell'affinità tra la logica matematica e Pascal, vi è una più generale affinità tra essa e la logica aristotelica. Per verificarlo si ricostruisce la concezione del metodo matematico di Aristotele e la si mette a confronto con quella di Hilbert, sottolineandone i molti punti di continuità oltre ai pochi di discontinuità, legati alla sostituzione della concezione concreta del metodo assiomatico con quella astratta. Si mostra che la continuità permane anche con la logica matematica dopo Hilbert.

Nel capitolo 5 si mostra che le motivazioni storiche solitamente addotte per il passaggio dalla concezione concreta del metodo assiomatico a quella astratta, quali la nascita delle geometrie non-euclidee e dell'algebra astratta, sono pretestuose perché gli autori di queste svolte ne davano un'interpretazione concreta piuttosto che astratta. Si mostra inoltre che, nonostante le giustificate critiche di Frege alla concezione astratta, questa si è trasformata con Hilbert in un'ideologia che assume non solo che ogni teoria matematica è una teoria assiomatica, ma addirittura che ogni teoria scientifica è matematica e quindi cade sotto il dominio del metodo assiomatico. Si considerano alcuni sviluppi di tale ideologia dopo Hilbert (Bourbaki, Curry, Mac Lane) e i guasti che essa ha prodotto.

Nel capitolo 6 si analizza il metodo matematico in termini della nozione di sistema concettuale chiuso, un analogo di quella di sistema fisico chiuso, e si mostra che essa sta alla base della concezione del mondo chiuso (sostenuta da Kant, Frege e Hilbert), secondo cui ogni campo della matematica e l'intera matematica sono sistemi concettuali chiusi. Si fa vedere che la nozione di sistema concettuale chiuso trova due diverse realizzazioni nell'ideografia di Frege e nei sistemi formali della logica matematica attuale, a cui corrispondono due diverse concezioni della completezza: la completezza in senso empirico di Frege e la completezza in senso metasistemico di Hilbert. Si esamina il tentativo di Wagner di usare la nozione di completezza in senso empirico per proporre una riedizione del logicismo di Frege, e se ne mostrano i limiti. Infine si discute il ruolo dell'analisi nella concezione del mondo chiuso e si dà una caratterizzazione del metodo assiomatico elencandone alcune proprietà fondamentali.

Nel capitolo 7 si esaminano i limiti della concezione del mondo chiuso, e in particolare dei sistemi chiusi, alla luce dei risultati di indefinibilità di Tarski, di incompletezza di Gödel e di indecidibilità di Church-Rosser, che mostrano l'impossibilità di una logica della giustificazione. Si discutono le conseguenze di questi risultati per il ruolo dei sistemi formali, per l'ideale della purezza dei metodi (Aristotele, Hilbert), per il problema della scoperta, per la verità matematica e per la rappresentazione della conoscenza. Si esaminano anche altri limiti dei sistemi chiusi, che riguardano la loro incapacità di rappresentare le conoscenze in evoluzione, la formazione delle ipotesi, il ragionamento non-monotono, le conoscenze incoerenti, le interazioni dinamiche tra sistemi.

Nel capitolo 8 si esaminano varie forme del metodo analitico, quali il metodo della riduzione di Ippocrate di Chio e i metodi delle ipotesi, della divisione, e della figura di Platone. Si sottolinea il carattere di processo infinito di tali metodi e si esamina la contrapposizione di Platone del metodo analitico al metodo assiomatico. Inoltre si discute la subordinazione del metodo analitico al metodo assiomatico introdotta attraverso il metodo analitico-sintetico di Aristotele e quello di Pappo. Si mostra che la distinzione tra il metodo analitico di Ippocrate di Chio e Platone e il metodo analitico-sintetico di Pappo è andata perduta nell'età moderna e contemporanea, dove il primo è stato dimenticato e ha prevalso il secondo. Come esempio di ciò si considerano le posizioni della *Logique* di Port-Royal, di Pólya, di Hintikka e Remes. Infine si dà una caratterizzazione del metodo analitico elencandone alcune proprietà fondamentali.

Nel capitolo 9 si formula la concezione analitica del metodo matematico in termini della nozione di sistema concettuale aperto, un analogo di quella di sistema fisico aperto, e si propone tale nozione come base di una concezione del mondo aperto secondo cui ogni campo della matematica e l'intera matematica sono sistemi concettuali aperti. Si esaminano le ragioni per cui la concezione del mondo chiuso è inadeguata e dev'essere rimpiazzata da quella del mondo aperto, e le si individua soprattutto nel primo teorema di incompletezza di Gödel e nella non-ampliatività della deduzione logica. Si considerano poi alcune proprietà che distinguono le dimostrazioni nei sistemi aperti da quelle nei sistemi chiusi, come l'evolutività, la plasticità e la modularità. Si dà infine una caratterizzazione dei sistemi aperti elencandone alcune proprietà fondamentali.

Nel capitolo 10, poiché il metodo analitico di per sé non fornisce processi per trovare le ipotesi, si esaminano vari candidati a tale ruolo come l'analisi, l'astrazione, l'abduzione, l'induzione e l'analogia. Si mostra che, tra essi, l'analisi e l'astrazione sono utili ma insufficienti per servire da base per una logica della scoperta, e che l'abduzione non rende conto della creatività della scoperta. L'induzione e l'analogia svolgono, invece, un ruolo centrale. Per esempio, a esse sono riconducibili molti altri processi di scoperta quali la generalizzazione e l'analisi delle dimostrazioni. Se ne conclude, perciò, che l'induzione e l'analogia possono costituire la base di una logica della scoperta.

Il libro trae origine da un ciclo di lezioni tenute a Napoli presso l'Istituto Italiano per gli Studi Filosofici nei giorni 31 maggio-4 giugno 1993, il cui testo è stato poi grandemente elaborato e ampliato. Sono grato all'Istituto per avermi costretto col suo invito a mettere ordine nei miei pensieri, e ai partecipanti alle lezioni per avermi stimolato con le loro osservazioni.

Oltre che nelle lezioni di Napoli le idee del libro sono state sottoposte a un pubblico più vasto in varie occasioni, tra cui il *Colloque Kurt Gödel* di Neuchâtel 1991, il *15. Internationale Wittgenstein-Symposium* di Kirchberg 1992, il *Colloquium Logicum* della Deutsche Vereinigung für Mathematische Logik und Grundlagenforschung di Neuseddin 1994, il convegno *The Growth of Mathematical Knowledge* di Penn State 1995, il workshop *Empiricism in the Philosophy of Science* di Bruxelles 1995, il seminario *Philosophy of Mathematics* del King's College di Londra 1996, il workshop *Logic and Meaning* di Stoccolma 1996, il workshop *Construction d'objectivité: entre intuition et raisonnement* di Parigi 1997. In tali occasioni sono stato particolarmente stimolato dalle osservazioni di Daniele Dubois, Burton Dreben, John Corcoran, Michael Dummett, Solomon Feferman, Donald Gillies, Emily Grosholz, Petr Hájek, Jaakko Hintikka, Dan Isaacson, Moshé Machover, Kenneth Manders, Mioara Mugur-Schachter, Werner Oberschelp, Charles Parsons, Dag Prawitz, Bas van Fraassen. Parti sostanziali di questo libro sono una risposta alle loro osservazioni.

Molti capitoli del libro, a cominciare dai due ultimi, si presterebbero a sviluppi e approfondimenti, e addirittura a essere materia di un intero libro. Ma, come dice Tristram Shandy, nessun autore che conosca i limiti del decoro e delle buone maniere può presumere di pensare a tutto. Il riguardo più vero che si può mostrare per il lettore è di esercitare una certa concisione, lasciando qualcosa alla sua immaginazione.

Molti hanno letto alcune parti del libro e mi hanno aiutato con le loro osservazioni e critiche. Tra loro in particolare ricordo Claudio Bernardi, Giuseppe Cambiano, Mirella Capozzi, Marta Cialdea Mayer, Cesare Cozzo, Maurizio Ferriani, Gabriele Giannantoni, Donald Gillies, Carlo Penco. Sono loro grato per l'impegno mostrato nel rilevare imprecisioni e suggerire miglioramenti, anche quando non erano d'accordo con le mie idee. Essi non sono in alcun modo responsabili delle opinioni da me presentate, ma tutt'al più forse per non avermi sufficientemente dissuaso dal pubblicarle.

Carlo Cellucci

Roma, 10 settembre 1997

# SIGLE

AR Archimede, *Opera omnia cum commentariis Eutocii*, a cura di I.L. Heiberg, Teubner, Leipzig 1972.

ASK W. Aspray e P. Kitcher (a cura di), *History and Philosophy of Modern Mathematics*, University of Minnesota Press, Minneapolis 1988.

BA F. Bacon, *Works*, a cura di J. Spedding et al., Frommann-Holzboog, Stuttgart-Bad Cannstatt 1961-1986.

BAR J. Barnes *et al.* (a cura di), *Articles on Aristotle. 1: Science*, Duckworth, London 1975.

BE G. Berkeley, *The Works*, a cura di A.A. Luce e T.E. Jessop, Nelson, London 1949.

BR L.E.J. Brouwer, *Collected Works*, a cura di A. Heyting e H. Freudenthal, North-Holland, Amsterdam 1975-1976.

CA G. Cantor, *Gesammelte Abhandlungen*, a cura di E. Zermelo, Olms, Hildesheim 1962.

CAA L. Carroll, *The Annotated Alice*, a cura di M. Gardner, Penguin Books, Harmondsworth 1987.

CAG *Commentaria in Aristotelem Graeca*, Reimer, Berlin 1882-1909.

DA M. Davis (a cura di), *The Undecidable*, Raven Press, New York 1965.

DE J.W.R. Dedekind, *Gesammelte mathematische Werke*, Vieweg, Braunschweig 1932.

DG J. Hintikka (a cura di), *From Dedekind to Gödel. Essays on the Development of the Foundations of Mathematics*, Kluwer, Dordrecht 1995.

DS R. Descartes, *Oeuvres*, a cura di C. Adam e P. Tannery, Vrin, Paris 1996.

EU Euclide, *Opera omnia*, a cura di I.L. Heiberg e H. Menge, Teubner, Leipzig 1883-1916.

EUL L. Euler, *Commentationes Arithmeticae*, a cura di F. Rudio, Teubner, Leipzig 1915-1944.

FE J.E. Fenstad (a cura di), *Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium*, North-Holland, Amsterdam 1971.

FRB G. Frege, *Begriffschrift und andere Aufsätze*, a cura di I. Angelelli, Olms, Hildesheim 1964.

| | |
|---|---|
| FRK | G. Frege, *Kleine Schriften*, a cura di I. Angelelli, Olms, Hildesheim 1990[2]. |
| FRN | G. Frege, *Nachgelassene Schriften*, Felix Meiner, Hamburg 1969. |
| FRW | G.Frege, *Wissenschaftlicher Briefwechsel*, Felix Meiner, Hamburg 1976. |
| GA | G. Galilei, *Opere*, a cura di A. Favaro, Barbera, Firenze 1968. |
| GE | G. Gentzen, *Collected Papers*, a cura di M.E. Szabo, North-Holland, Amsterdam 1969. |
| GO | K. Gödel, *Collected Works*, a cura di S. Feferman et al., Oxford University Press, Oxford 1986-1995. |
| GR | R.P. Graves, *Life of Sir William Rowan Hamilton*, Longmans, Green & Co., London 1882-1889. |
| HL | D. Hilbert, *Gesammelte Abhandlungen*, Springer-Verlag, Berlin 1970[2]. |
| KA | I. Kant, *Gesammelte Schriften*, Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften, Berlin 1900-1955. |
| KR | L. Kronecker, *Werke*, a cura di K. Hensel, Teubner, Leipzig 1895-1930. |
| LA | P.-S. Laplace, *Oeuvres Complètes*, Gauthier-Villars, Paris 1878-1912. |
| LEB | G.W. Leibniz, *Handschriften der Königlichen öffentlichen Bibliotek zu Hannover*, a cura di E. Bodemann, Olms, Hildesheim 1966. |
| LEC | G.W. Leibniz, *Opuscules et fragments inédits*, a cura di L. Couturat, Olms, Hildesheim 1966. |
| LEG | G.W. Leibniz, *Textes inédits d'après les manuscrits de la Bibliothèque provinciale de Hanover*, a cura di G. Grua, Presses Universitaires de France, Paris 1948. |
| LEL | G.W. Leibniz, *Philosophical Papers and Letters*, a cura di L.E. Loemker, Reidel, Dordrecht 1969. |
| LEM | G.W. Leibniz, *Mathematische Schriften*, a cura di C.I. Gerhardt, Olms, Hildesheim 1971. |
| LEP | G.W. Leibniz, *Die philosophischen Schriften*, a cura di C.I. Gerhardt, Olms, Hildesheim 1965. |
| LER | G.W. Leibniz, *Briefwechsel mit Mathematikern*, a cura di C.I. Gerhardt, Olms, Hildesheim 1962. |
| LU | J. Lukasiewicz, *Selected Works*, a cura di L. Borkowski, North-Holland, Amsterdam 1970. |
| MI | J.S. Mill, *Collected Works*, a cura di J.M. Robson, University of Toronto Press, Toronto 1963-1986. |
| PA | B. Pascal, *Oeuvres*, a cura di L. Brunschvicg, P. Boutroux e F. Gazier, Hachette, Paris 1904-1914. |
| PEC | C.S. Peirce, *Collected Papers*, a cura di C. Hartshorne e P. Weiss, Harvard University Press, Cambridge, Mass. 1931-1958. |
| PEN | C.S. Peirce, *The New Elements of Mathematics*, a cura di C. Eisele, Mouton, The Hague e Humanities Press, Atlantic Highlands, N.J. 1976. |

PI M. Pieri, *Opere sui fondamenti della matematica*, Cremonese, Roma 1980.
POD H. Poincaré, *Dernières Pensées*, Flammarion, Paris 1919.
POH H. Poincaré, *La Science et l'Hypothèse*, Flammarion, Paris 1968.
POM H. Poincaré, *Science et Méthode*, Flammarion, Paris 1908.
POV H. Poincaré, *La Valeur de la Science*, Flammarion, Paris 1970.
RI B. Riemann, *Gesammelte mathematische Werke, wissenschaftlicher Nachlass und Nachträge*, a cura di H. Weber *et al.*, Springer-Verlag, Berlin 1990.
SC A. Schopenhauer, *Sämtliche Werke*, Cotta-Insel, Stuttgart-Frankfurt a.M. 1960.
TA A. Tarski, *Logic, Semantics, Metamathematics*, Oxford University Press, Oxford 1956.
VH J. van Heijenoort, *Selected Essays*, Bibliopolis, Napoli 1985.
VI F. Viète, *Opera mathematica*, a cura di F. van Schooten, Elzevir, Leyden 1646.
WEY H. Weyl, *Gesammelte Abhandlungen*, Springer-Verlag, Berlin 1968.

# INTRODUZIONE

Viene un momento, in ogni settore della conoscenza, in cui non si producono più idee davvero nuove, e le ricerche continuano ad andare avanti per una certa via solo per forza di inerzia, perché qualcuno l'ha già intrapresa, e non perché essa abbia, o abbia ancora, uno scopo chiaramente visibile e importante. Quando arriva quel momento, c'è solo da augurarsi che venga introdotta al più presto qualche nuova idea brillante, che mandi in soffitta il paradigma corrente e ne instauri un altro. Ma non ci si deve illudere che le nuove idee vengano accolte a braccia aperte. Le resistenze al cambiamento sono fortissime in tutti i campi, ivi compresa la logica.

Un tale momento sembra essere giunto per il paradigma logico che è stato dominante nel nostro secolo, la logica matematica. I segni ci sono tutti: c'è la mancanza di idee nuove, la sclerotizzazione delle ricerche e il loro perpetuarsi senza alcuno scopo rilevante, o con scopi rispetto a cui esse sono manifestamente inadeguate. La finalità per cui la logica matematica era stata creata in origine, garantire la certezza assoluta della matematica, si è dimostrata irrealizzabile a causa dei risultati di incompletezza di Gödel, e le nuove finalità che essa ha tentato di ritagliarsi si sono rivelate inconsistenti, perciò il suo campo di applicazione è diventato sempre più angusto. I logici matematici somigliano sempre più a «meccanici che danno descrizioni di strumenti di cui non potrebbero affatto servirsi»[1]. Non per loro incapacità ma perché i loro strumenti, a causa della loro limitatezza, sono inutilizzabili per scopi seri e importanti. Si ha sempre più la sensazione che, come nel Seicento la logica aristotelica, così anche la logica matematica abbia imboccato una via di crescente futilità in fondo alla quale non può esservi che l'inevitabile decadenza e infine l'estinzione.

Con ciò non si vuole affatto sminuire l'importanza della logica matematica, né tanto meno quella della logica aristotelica. Le creazioni di Aristotele e Frege stanno davanti a noi come monumenti perenni a cui dobbiamo sempre ritornare con la nostra riflessione e col nostro pensiero, e da cui possiamo sempre imparare qualcosa di nuovo. Ma, come spesso accade anche alle più splendide costruzioni intellettuali, esse si sono rivelate insufficienti sia per i loro scopi originari che per le nuove esigenze sopravvenute in seguito.

Questa diagnosi sullo stato della logica contrasta col punto di vista corrente secondo cui, con la nascita della logica matematica, in un cinquantennio che va dalla pubblicazione nel 1879 della *Begriffsschrift* di Frege a quella nel 1928 dei *Grundzüge der theoretischen Logik* di Hilbert e Ackermann, la logica sarebbe diventata una scienza utile e feconda e avrebbe assunto la sua forma definitiva. Tale punto di vista è anticipato da Russell secondo cui col passaggio dalla sillogistica aristotelica alla logica matematica si è determinato «lo stesso tipo di progresso che Galileo introdusse nella fisica»[2]. La creazione della logica matematica ha reso la sillogistica aristotelica «un sistema altrettanto decisamente antiquato dell'astronomia tolemaica»[3]. Come la fisica, per nascere come scienza in senso moderno, ha dovuto sconfiggere le resistenze della tradizione aristotelica, lo stesso è avvenuto con la logica matematica, sicché si può dire che «in tutta l'epoca moderna praticamente ogni progresso nella scienza, nella logica o nella filosofia ha dovuto compiersi contro i discepoli di Aristotele»[4]. Ma la tradizione aristotelica ormai appartiene al passato. Con la nascita della logica matematica la logica ha finalmente assunto quella stabilità e quell'autonomia che sono proprie delle scienze. Non è escluso che in futuro possano intervenire in essa mutamenti anche rilevanti, ma si tratterebbe comunque solo di cambiamenti interni a una stessa forma della logica.

Questo punto di vista, però, non appare molto convincente. Contro di esso si possono avanzare almeno le seguenti obiezioni.

1) *Dire che, con la nascita della logica matematica, la logica è diventata una scienza, significa assumere tacitamente che prima non lo fosse.* Ciò è difficilmente sostenibile perché, come sottolinea Leibniz, Aristotele «per primo, per quanto consta, pose la stessa logica nella forma di una scienza matematica»[5]. Vi sono «esempi assai considerevoli di dimostrazioni al di fuori delle matematiche, e si può dire che Aristotele ne ha offerte già nei suoi *Analitici primi*»[6]. La «logica dei sillogismi è veramente dimostrativa, proprio come l'aritmetica o la geometria»[7]. In effetti «la logica è altrettanto suscettibile di dimostrazione che la geometria, e si può dire che la logica dei geometri, o i modi di argomentare che Euclide ha spiegato e stabilito nel parlare delle proposizioni, siano un'estensione o promozione particolare della logica generale»[8]. Se è possibile «ragionare dimostrativamente in matematica è in buona parte perché l'esperienza può garantirvi il ragionamento in ogni momento, come accade anche nelle figure dei sillogismi»[9]. L'opinione di Leibniz appare largamente condivisa. Nell'ambito della stessa logica matematica è stato riconosciuto che Aristotele ha accostato «la logica al paradigma della matematica e le ha impres-

so il massimo di forma di una scienza nel suo senso»[10]. Non solo egli ha fatto questo ma «più di tanto non possiamo fare per principio neppur noi oggi, e neanche concepirlo»[11]. E ciò perché egli ha creato «un sistema la cui esattezza supera persino quella di una teoria matematica»[12]. Inoltre la sillogistica è «il primo sistema assiomatico a noi noto, o, più precisamente, la prima classe di tali sistemi; infatti Aristotele la ha assiomatizzata in vari modi»[13]. Anzi la sillogistica è il primo esempio di sistema assiomatico astratto, perché la validità dell'inferenza sillogistica non dipende dall'interpretazione delle lettere che occorrono in essa ma solo dalle loro relazioni formali. Ogni interpretazione delle lettere è egualmente ammissibile e «la conclusione sarà tale sempre e universalmente e per ogni scelta della materia»[14]. Cioè, sarà vera per ogni interpretazione delle lettere che rende vere le premesse.

2) *Dire che, con la nascita della logica matematica, la logica è diventata utile e feconda, significa trascurare che la finalità per cui la logica matematica era stata creata in origine, cioè garantire la certezza assoluta della matematica, è risultata irrealizzabile.* Di fronte a ciò negli ultimi decenni i logici matematici sono andati alla ricerca di nuovi scopi per la loro disciplina, come quello di servire da strumento per la pratica matematica o per l'informatica, ma i loro sforzi sono risultati infruttuosi. È apparso sempre più evidente che le varie branche della logica matematica sono discipline marginali rispetto al resto della matematica, e che i risultati della logica matematica non svolgono in essa alcun ruolo essenziale. La «teoria degli insiemi è ampiamente irrilevante per la pratica di gran parte della matematica»[15]. Più in generale non vi sono applicazioni importanti alla matematica «della teoria degli insiemi o della teoria dei modelli, per citare solo le aree più 'matematiche' della logica (tanto meno della teoria della dimostrazione o della teoria della ricorsione)»[16]. Ogni algebrista «conosce l'importanza della geometria o anche dell'analisi per la propria disciplina, così come fa ogni analista rispetto alle altre discipline, e così via per tutte le combinazioni possibili»[17]. Ma «non è così per la logica matematica»[18]. I suoi risultati più famosi, come il teorema di completezza o quelli di incompletezza di Gödel, non sono menzionati nella letteratura matematica, e non a causa di un complotto ma semplicemente perché essi «non hanno trovato alcun uso; giustamente, dato che sono fatti su misura per confutare o suffragare, poco importa, una tesi»[19]. Quanto alle applicazioni all'informatica, il progetto giapponese di basare una nuova generazione di computer sui sistemi della logica matematica si è risolto in un clamoroso insuccesso.

3) *Dire che, con la nascita della logica matematica, la logica ha assunto la sua forma definitiva, significa assumere che essa non potrà mai avere un'altra forma.* Ogni suo sviluppo dovrà rimanere all'interno del quadro della logica matematica. Ora, la necessità di una nuova forma

della logica che fuoriesca da quel quadro, emerge da vari settori del sapere contemporaneo come l'informatica, l'intelligenza artificiale, la scienza cognitiva, la linguistica, la sociologia, l'economia, da cui risulta chiaro che l'apparato concettuale della logica matematica non offre una base logica adeguata. Un tempo «si pensava che la logica formale fosse un'interpretazione dei nostri processi di ragionamento, ma dopo l'esperienza dell'intelligenza artificiale si è capito che la logica formale è solo un'altra fuga dalla realtà»[20]. Giudizi del genere non derivano da un atteggiamento preconcetto nei confronti della logica matematica. A suo favore in passato era stata fatta una grande apertura di credito, fino al punto di ipotizzare che tra essa e l'informatica si sarebbe instaurato un rapporto «altrettanto fecondo nel prossimo secolo quanto quello tra analisi e fisica nel secolo scorso»[21]. Ma quando la logica matematica è stata messa alla prova ne sono apparsi tutti i limiti. Ciò ha finito per accreditare l'idea che la logica sia inadeguata come strumento per la soluzione di problemi, che essa sia «più adatta per esporre o confermare i risultati del pensiero che non per il pensiero stesso»[22]. E che noi possiamo usarla «per risolvere problemi meno di quanto la usiamo per spiegare le soluzioni ad altre persone e, più ancora, a noi stessi»[23]. Così le deficienze della logica matematica hanno finito per essere scambiate per limiti della logica.

In alternativa al punto di vista corrente sembra più plausibile affermare che le forme assunte dalla logica nel suo sviluppo sono tutte più o meno scientifiche, e che la logica matematica è soltanto una di tali forme, certo non l'ultima né quella definitiva. Passare da una forma della logica all'altra non significa abbandonare una disciplina non scientifica per una scientifica ma soltanto adottare una diversa disciplina scientifica. Non v'è ragione di supporre che, con l'emergere nelle varie scienze di nuove esigenze metodologiche, l'attuale forma della logica non debba lasciar posto a un'altra. Supporlo è solo una proiezione del desiderio un po' ingenuo dei logici matematici di essere il punto di arrivo della storia della loro disciplina.

Inoltre, passare da una forma della logica a un'altra non può essere messo sullo stesso piano degli sviluppi interni di una disciplina. Una nuova forma della logica «parte da presupposti e punti di vista diversi, si serve di un'altra tecnica e sviluppa aspetti della problematica poco considerati prima»[24]. Perciò il passaggio a essa è un cambiamento di paradigma, se per paradigma si intende un insieme di concetti e metodi a cui una comunità scientifica, «per un certo periodo di tempo, riconosce la capacità di costituire il fondamento della sua pratica ulteriore»[25]. Tali concetti e metodi sono di solito codificati in certi classici o manuali, che servono «per un certo periodo di tempo a definire implicitamente i problemi e i metodi legittimi in un dato campo di ricerca»[26]. Nel caso della logica, fino agli inizi del secolo scorso questa funzione è stata svolta dall'*Organon* di Aristotele, poi i concetti e i metodi di Frege e di Hilbert sono stati riconosciuti dalla comunità logica come capaci di sostituire quelli della logica aristotelica come fondamento della sua pratica ulteriore. Essi sono stati codificati in opere come i *Grundzüge der theoretischen Logik* di Hilbert e Ackermann o le *Grundlagen der Mathematik* di Hilbert e Bernays, che sono servite per mezzo secolo a definire implicitamente i problemi e i metodi legittimi nel campo della logica.

Un paradigma può avere effetti sia positivi che negativi. Da un lato, spinge a trovare nuove specificazioni dei fatti e delle teorie e, concentrando l'attenzione su un ambito ristretto di problemi e metodi, porta ad approfondirli in un modo altrimenti impensabile. Dall'altro, induce a rimanere nel suo ambito e a guardare con sospetto tutto ciò che non vi rientra considerandolo come confuso e avventuroso, e perciò alla lunga risulta restrittivo. È quanto è avvenuto con la logica matematica dove, per un verso, sono state introdotte nuove specificazioni dei concetti e metodi dei fondatori della disciplina senza però rimetterne in discussione le assunzioni fondamentali, e, per un altro verso, si è visto con sospetto chi, come Post, pur avendo dato importanti contributi alla disciplina, dopo la scoperta del primo teorema di incompletezza di Gödel aveva proclamato che «questo è un risultato iconoclastico dal punto di vista del logico formale, dal momento che esso significa che la logica, non solo in certe parti della sua descrizione (come nelle operazioni), ma nel suo stesso operare, deve essere informale»[27]. Con queste affermazioni Post entrava in conflitto col paradigma corrente, e difatti egli si vide rifiutare il lavoro in cui le aveva espresse, che poté essere pubblicato soltanto postumo.

I teoremi di incompletezza di Gödel sono stati il primo serio indizio dei limiti della logica matematica. Essi hanno sconvolto i suoi intenti, ed è singolare che ciò sia stato prodotto da un assoluto conservatore come Gödel, che vede nello sviluppo della filosofia dal Rinascimento all'età contemporanea una deplorevole tendenza verso l'empirismo e lo scetticismo, tendenza che, con la scoperta dei paradossi, ha finito per contagiare persino la matematica, inducendo molti matematici a negare «che la matematica, quale era stata sviluppata precedentemente, rappresenti un sistema di verità»[28]. È ironico che proprio Gödel coi suoi risultati di incompletezza abbia contribuito a rafforzare questa tendenza.

I teoremi di incompletezza di Gödel hanno posto i logici di fronte all'alternativa: o mettere la testa nella sabbia e fare come se essi non esistessero, trattandoli come scheletri nell'armadio da dimenticare il più possibile; oppure abbandonare l'idea che la logica possa garantire la certezza assoluta della matematica, ripensandone completamente le basi e indirizzandola verso nuove finalità. La prima via è quella imboccata dalla logica matematica, la quale, invece di rimettere in discussione le proprie assunzioni fondamentali, ha continuato a costruire su esse come se non esistessero i risultati di Gödel. Addirittura nel suo ambito si lamenta che non si sia «riconosciuto quanto limitata sia in realtà l'importanza del risultato di incompletezza di Gödel»[29]. La seconda via richiede, invece, di abbandonare le assunzioni fondamentali della logica matematica, riconoscendo che i risultati di Gödel rimettono in discussione l'intero approccio ai problemi logici della logica matematica. La prima via sembra difficilmente soddisfacente e sorprende che i logici matematici l'abbiano seguita per più di mezzo secolo, data la sua sempre più evidente inadeguatezza sia rispetto al loro scopo originario che rispetto ai nuovi scopi proposti. La seconda via richiede l'abbandono del paradigma logico corrente e l'introduzione di un nuovo paradigma, più rispondente alle esigenze del sapere contemporaneo.

Il cambiamento di paradigma riguarda tutte le assunzioni fondamentali della logica matematica, e segnatamente quelle che la logica non debba occuparsi del problema della scoperta di nuove conoscenze ma solo di quello della giustificazione di conoscenze già acquisite; che il metodo della matematica debba identificarsi col metodo assiomatico; che la logica debba avere per oggetto tale metodo, tanto il ragionamento deduttivo che ne sta alla base quanto proprietà globali dei sistemi assiomatici come la coerenza e completezza. Queste assunzioni devono essere rimpiazzate con altre totalmente differenti, per esempio che la logica debba occuparsi tanto del problema della giustificazione di conoscenze già acquisite quanto di quello della scoperta di nuove conoscenze; che il metodo della matematica debba identificarsi col metodo analitico; che la logica debba avere per oggetto questo metodo, tanto il ragionamento che ne sta alla base quanto i procedimenti attraverso cui si trovano le ipotesi, quali l'induzione e l'analogia.

Il metodo analitico, l'induzione, l'analogia e tutti gli altri ingredienti della scoperta matematica sono stati ignorati dalla logica matematica. Per essa rimane vera l'affermazione di Kant, che «nessun logico finora ha trattato propriamente l'analogia e l'induzione. Questo campo rimane ancora aperto»[30]. Per trattare gli ingredienti della scoperta matematica occorre superare vari pregiudizi, come quello che l'induzione «non è un processo logico, sebbene possano esservi intercalati processi logici come elementi intermedi e ausiliari»[31]. O come quello che «le inferenze per somiglianza e analogia non sono oggetto della logica, per lo meno della logica formale, ma solo della psicologia»[32].

Le nuove tematiche non si aggiungono a quelle della logica matematica ma si sostituiscono ad esse perché richiedono un radicale cam-